

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет «Информатика и вычислительная техника»

Кафедра «Информационные технологи»

#### «Методы исследования и моделирования

#### информационных процессов»

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

### ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

### (1 семестр)

### Ростов-на-Дону

### 2020

### Составил: доц., к.т.н. Каныгин Г.И.

#### Задания и методические указания к выполнению контрольных работ по курсу «Методы исследования и моделирования информационных процессов». – ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2020, 23 с.

Методические указания предназначены для освоения технологий моделирования различных объектов и содержат варианты лабораторных работ по курсу «Методы исследования и моделирование» и рекомендации по их выполнению.

Научный редактор: проф. д.т.н. Соболь Б.В.

**Лабораторная работа 1**

**Тема: «Построение и анализ эмпирической**

**математической модели»**

**Цель работы**: Определение оператора модели, преобразующего входные воздействия объекта в выходные величины. Проверка адекватности математической модели экспериментальным данным.

**1.1. Задание:**

1. Методами регрессионного анализа построить модель идентификации второго порядка .
2. Провести статистический анализ модели.
3. Проверить целесообразность включения в модель члена третьего порядка, т.е. перехода к модели .

Для получения выборки «экспериментальных» данных необходимо осуществить математический эксперимент с уравнением

, (1.1)

в котором величина *x* измеряется точно, а с ошибкой , имеющей нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией Коэффициенты уравнения (1.1) и значение *d* выбираются в соответствии с вариантом задания из табл.1.1.

Математический эксперимент проводится по следующей схеме:

* с помощью датчика равномерно распределенных на отрезке [0, 1] случайных чисел определяется случайное число
* величина *x* определяется нормированием случайного числа на интервал [0, *d*]
* c помощью датчика нормально распределенных [0, 1] случайных чисел определяется случайное число , представляющее собой «ошибку» эксперимента , здесь *N* последняя цифра номера зачетной книжки;
* «экспериментальная» величина определяется по (1.1) как сумма регулярной *y* и случайной составляющих.

Результатом математического эксперимента является выборка *n*=10 случайных пар .

Таблица 1.1

Исходные данные для проведения

математического эксперимента

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  | *d* |
| 1 | 1 | 3 | -0,2 | 12 |
| 2 | 0,1 | 4 | -0,3 | 12 |
| 3 | 4 | 8 | -0,8 | 8 |
| 4 | 0,6 | 11 | -0,8 | 10 |
| 5 | 2 | 5 | -0,6 | 11 |
| 6 | 0,5 | 2 | -0,2 | 9 |
| 7 | 0,1 | 9 | 0,9 | 7 |
| 8 | 0,8 | 12 | -1 | 10 |
| 9 | 5 | 19 | -2 | 8 |
| 10 | 0,4 | 2 | 0,1 | 12 |
| 11 | 3 | 6 | -0,7 | 8 |
| 12 | 0,5 | 9 | -0,7 | 9 |
| 13 | 0,1 | 5 | -0,4 | 9 |
| 14 | 4 | 18 | -2 | 7 |
| 15 | 0,7 | 9 | -0,7 | 9 |
| 16 | 8 | 20 | -2 | 8 |
| 17 | 0,2 | 10 | -1 | 8 |
| 18 | 0,9 | 9 | 0,9 | 8 |
| 19 | 15 | 16 | -1,5 | 8 |
| 20 | 0,4 | 12 | -1 | 9 |

**1.2. Теоретические сведения**

**1.2.1. Выбор формы идентификации и регрессионный анализ**

Математически задача идентификации формулируется следующим образом. Имеется *n* пар экспериментальных точек . Требуется построить зависимость (модель)

, (1.2)

которая описывает характеристики изучаемой системы. Уравнение (1.2) называется уравнением регрессии.

Построение модели идентификации начинается с выбора формы модели, т.е. вида зависимости (1.2). При этом на практике могут встретится два случая.

* Форма математической модели *известна заранее*. В этом случае задача идентификации сводится к определению коэффициентов этой модели.
* Форма математической модели *заранее неизвестна*. В этом случае целесообразно использовать для построения модели общее разложение функции в ряд Тейлора.

В данной лабораторной работе при идентификации ставится задача нахождение приближенной модели в виде полинома степени *p*

.

Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор находится из решения нормального уравнения

,

где

Таким образом, для определения коэффициентов уравнения регрессии необходимо произвести следующие операции:

* составить матрицу независимых переменных Вандермонда и матрицу-столбец результатов , здесь *m* число коэффициентов регрессии(*m*=*p*+1).
* найти транспонированную матрицу переменных и произвести перемножение матриц;
* найти обратную матрицу и умножить ее на матрицу , т.е. получить искомую матрицу-столбец .

**1.2.2. Статистический анализ модели**

После вычисления коэффициентов регрессии необходимо провести статистический анализ полученной модели. Для этого необходимо вычислить следующие характеристики регрессионной зависимости:

* величину остаточной суммы квадратов отклонений фактических значений от ее теоретических значений и число степеней свободы модели

;

* средние квадраты остаточных сумм
* критерий Фишера

здесь - дисперсия, характеризующая ошибку эксперимента.

*F* – отношение характеризуется двумя последовательно записанными значениями степеней свободы числителя и знаменателя. При этом, так как точность статистических оценок возрастает с ростом числа степеней свободы, то число степеней свободы точной величины принимается равным .

Полученную величину *F* – отношения сравнивают с критическим (пороговым) значение критерия Фишера при соответствующих числах степеней свободы и заданном уровне значимости . При - модель принимается. Если расхождение результатов моделирования и экспериментальных данных *значимо* и, следовательно, модель должна быть отвергнута как недостаточно точная.

* оценку связи коэффициентов регрессии между собой .

Эта оценка проводится по ковариационной матрице

.

Диагональные элементы матрицы определяют дисперсии коэффициентов регрессии, а недиагональные – взаимосвязь этих коэффициентов.

Коэффициент корреляции может изменяться в пределах .

Для сравнения моделей необходимо:

* рассчитать дополнительную сумму квадратов

,

где - остаточная сумма квадратов первой и второй модели соответственно;

* определить число степеней свободы дополнительной суммы квадратов

;

* посчитать средний квадрат дополнительной суммы

;

* определить роль дополнительной информации с помощью критерия Фишера

.

Если полученное значение критерия Фишера значимо , то дополнительная информация, заложенная в модель 2 существенна, и модель 2 действительно отличается от модели 1. В противном случае уточнения, вносимые моделью 2, неразличимы на фоне шума; с точки зрения модели равноценны и предпочтение должно быть отдано более простой модели 1.

**1.3. Пример построения модели идентификации**

Для получения выборки «экспериментальных» данных осуществим математический эксперимент с уравнением

(1.3)

по следующей схеме:

* с помощью датчика равномерно распределенных на отрезке [0, 1] случайных чисел определяется случайное число
* величина *x* определяется нормированием случайного числа на интервал [0, 6]
* c помощью датчика нормально распределенных [0, 1] случайных чисел определяется случайное число , представляющее собой «ошибку» эксперимента , здесь *N* последняя цифра номера зачетной книжки;
* «наблюдаемая» величина определяется по (1.3) как сумма регулярной *у* и случайной составляющих.

Результаты математического эксперимента (выборка *n*=10 случайных пар ), представлены в виде точек на рис.1.1 (ряд 3).

Построим модель идентификации . Согласно методу наименьших квадратов, искомый вектор коэффициентов находится из решения нормального уравнения

. (1.4)

Найдем составляющие уравнения (1.4)

Таким образом, получена зависимость

на рис.1.1- ряд 2. Из рисунка видно, что полученная модель качественно правильно воспроизводит исходное описание.

Статистические характеристики модели имеют следующие значения:

* остаточная сумма квадратов

;

* число степеней свободы остаточной суммы квадратов
* средние квадраты остаточных сумм
* критерий Фишера

По таблицам распределения критерия Фишера , при 5%-м уровне значимости находим критическое значение . Так как полученное значение *F* меньше критического, гипотеза об адекватности модели реальному процессу принимается.

Определим связи коэффициентов регрессии между собой

;

Таким образом, коэффициенты регрессии достаточно сильно связаны между собой.

Поскольку форма модели заранее неизвестна, целесообразно рассмотреть возможность использования кубической модели

.

Проводя аналогичные вычисления, найдем коэффициенты такой модели

(1.5)

на рис.1.1 – ряд 1.



Для проверки целесообразности включения в модель члена третьей степени вычисляется остаточная сумма квадратов для уравнения (1.5), дополнительная сумма квадратов, средний квадрат и величина Фишера:

По таблицам распределения (прил. 1) определяем критическое значение Фишера В связи с тем, что полученное из расчета значение критерия Фишера меньше критического, можно считать, что член третьего порядка не добавляет существенной информации и, следовательно, нецелесообразен.

**Лабораторная работа 2**

**Тема: «Нелинейные эмпирические математические модели»**

**Цель работы**: Освоить методы построения основных видов нелинейных эмпирических моделей с помощью ЭВМ (внутренне линейные модели), научиться получать и анализировать показатели качества моделей.

**2.1. В соответствии с вариантом задания средствами MS Excel найти:**

1.   Коэффициенты и эмпирической зависимости (см. таблицу 2.1), используя данные таблицы 2.2.

2. Построить график полученной зависимости. Отдельными точками показать табличные значения.

3. Коэффициент детерминации и сделать выводы по адекватности модели.

**Указания к выполнению работы:**

Особенностью моделей (табл.2.1) является то, что с помощью элементарных преобразований все они могут быть сведены к линейной модели.

* Степенная и показательная функции сводится к линейной функции путем логарифмирования. Предполагается, что значения аргумента и значения функции в исходной таблице положительны.
* Дробно-линейная и дробно-рациональная функции сводится к линейной функции путем замены их обратными величинами.
* Гипербола сводится к линейной функции путем замены выражения на .
* Логарифмическая функция сводиться к линейной функции путем замены   
  .

**Таблица 2.1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант | Уравнение зависимости | |
| 01, 08, 15, 22 | Линейная модель |  |
| 02, 09, 16, 23 | Степенная модель |  |
| 03, 10, 17, 24 | Экспоненциальная модель |  |
| 04, 11, 18, 25 | Дробно-линейная модель |  |
| 05, 12, 19 | Логарифмическая модель |  |
| 06, 13, 20 | Гиперболическая модель |  |
| 07, 14, 21, | Дробно-рациональная модель |  |

**Таблица 2.2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Числовые значения случайных величин | | | | | | | | |
| 01 |  | 1,1 | 1,7 | 2,4 | 3,0 | 3,7 | 4,5 | 5,1 | 5,8 |
|  | 0,3 | 0,6 | 1,1 | 1,7 | 2,3 | 3,0 | 3,8 | 4,6 |
| 02 |  | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 | 7,5 | 8,5 |
|  | 2,2 | 4,53 | 9,22 | 16,4 | 25,0 | 36,3 | 49,1 | 64,4 |
| 03 |  | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 |
|  | 3,72 | 3,91 | 4,15 | 4,44 | 4,77 | 5,15 | 5,57 | 6,06 |
| 04 |  | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |
|  | 2,0 | 2,6 | 3,0 | 2,8 | 2,2 | 1,3 | 1,7 | 2,5 |
| 05 |  | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 | 2,5 |
|  | 2,11 | 2,22 | 2,35 | 2,40 | 2,59 | 2,60 | 2,70 | 2,81 |
| 06 |  | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 |
|  | 5,12 | 13,52 | 22,07 | 36,55 | 60,43 | 99,5 | 163,78 | 271,3 |
| 07 |  | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
|  | 2,2 | 2,8 | 3,2 | 3,0 | 2,4 | 1,5 | 1,9 | 2,7 |
| 08 |  | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 | 7,5 |
|  | 12,0 | 6,6 | 5,0 | 4,4 | 3,7 | 3,5 | 3,3 | 3,0 |
| 09 |  | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
|  | 3,77 | 3,96 | 4,20 | 4,49 | 4,82 | 5,20 | 5,62 | 6,11 |
| 10 |  | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 |
|  | 2,01 | 2,12 | 2,25 | 2,30 | 2,49 | 2,50 | 2,60 | 2,77 |
| 11 |  | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 |
|  | 5,20 | 13,16 | 22,15 | 36,65 | 60,31 | 99,4 | 163,8 | 271,2 |
| 12 |  | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
|  | 0,34 | 0,26 | 0,20 | 0,17 | 0,14 | 0,12 | 0,11 | 0,96 |
| 13 |  | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 |
|  | 0,44 | 0,36 | 0,30 | 0,27 | 0,24 | 0,22 | 0,21 | 1,05 |
| 14 |  | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 |
|  | 2,03 | 2,14 | 2,27 | 2,32 | 2,51 | 2,52 | 2,62 | 2,73 |
| 15 |  | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
|  | 3,0 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 2,0 | 1,8 | 1,6 | 1,5 |
| 16 |  | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 |
|  | 0,38 | 0,30 | 0,24 | 0,21 | 0,18 | 0,16 | 0,15 | 0,11 |
| 17 |  | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 |
|  | 3,0 | 3,6 | 4,0 | 3,8 | 3,2 | 2,3 | 2,7 | 3,5 |
| 18 |  | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 |
|  | 1,2 | 1,6 | 1,7 | 1,77 | 1,87 | 1,9 | 1,95 | 2,0 |
| 19 |  | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 |
|  | 0,18 | 0,28 | 0,31 | 0,52 | 0,63 | 0,7 | 0,79 | 0,84 |
| 20 |  | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |
|  | 4,9 | 13,3 | 21,85 | 36,35 | 60,01 | 99,1 | 160,4 | 171,5 |
| 21 |  | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 |
|  | 1,5 | 1,6 | 1,8 | 1,77 | 1,87 | 1,62 | 1,94 | 1,81 |
| 22 |  | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 | 2,5 |
|  | 6,21 | 6,22 | 6,35 | 6,46 | 6,59 | 6,67 | 6,70 | 6,83 |
| 23 |  | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 | 7,5 |
|  | 6,0 | 6,6 | 5,1 | 4,7 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 3,6 |
| 24 |  | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 |
|  | 4,01 | 4,22 | 5,25 | 4,33 | 4,50 | 4,58 | 4,60 | 4,78 |
| 25 |  | 1,1 | 1,7 | 2,4 | 3,0 | 3,7 | 4,5 | 5,1 | 5,8 |
|  | 1,32 | 1,60 | 1,24 | 1,54 | 1,34 | 1,09 | 1,81 | 1,67 |

**2.2. Пример определения параметров эмпирической модели**

**Задания:**

1. Найти параметры  и  степенной зависимости , отвечающие таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,1 | 1,7 | 2,4 | 3,0 | 3,7 | 4,5 | 5,1 | 5,8 |
|  | 0,3 | 0,6 | 1,1 | 1,7 | 2,3 | 3,0 | 3,8 | 4,6 |

2. Построить график полученной зависимости , отдельными точками показать табличные значения.

3. Посчитать коэффициент детерминации и сделать выводы по адекватности модели.

**а) расчет коэффициентов модели**

Для перехода  к линейной функции прологарифмируем равенство .

Сделаем замену . Тогда задача свелась к отысканию приближенной функции . Отсюда следует, что для нахождения значений коэффициентов  и  нужно прологарифмировать значения аргумента исходной таблицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,095310 | 0,5306282 | 0,8754687 | 1,098612 | 1,308333 | 1,504077 | 1,629240 | 1,757858 |
|  | -1,203972 | -0,510824 | 0,095310 | 0,530628 | 0,832909 | 1,098612 | 1,335001 | 1,526056 |

**Метод 1.** Используя статистическую функцию ЛИНЕЙ( ), находим параметры  и  уравнения регрессии .

Найдем значения параметров степенной функции . Следовательно, уравнение регрессии имеет вид .

**б) проверка модели на адекватность**

Степень тесноты связи между экспериментальными данными и уравнением регрессии оценивается с помощью коэффициента детерминации

,

где ;

.

Для наилучшей эмпирической формулы величина  является наибольшей. Показателям тесноты связи можно дать качественную оценку (*шкала Чеддока*):

|  |  |
| --- | --- |
| Количественная мера тесноты связи | Качественная характеристика силы связи |
| 0,1-0,3 | Слабая |
| 0,3-0,5 | Умеренная |
| 0,5-0,7 | Заметная |
| 0,7-0,9 | Высокая |
| 0,9-0,99 | Весьма высокая |

Коэффициент детерминации для данной модели равен 0.984, что говорит о высокой тесноте связи между экспериментальными данными и найденным уравнением регрессии.

**в) функции *Excel***

Функция ЛИНЕЙ( ) имеет следующий формат ЛИНЕЙ (*Известные\_значения\_Y; Известные\_значения\_Х*). Данная функция вводится как функция массива. Методология использования функции следующая:

* Выделите диапазон ячеек, отведенных для расчета значений  и .
* Вызовите функцию ЛИНЕЙ( ) из категории *Статистические*. Появится окно диалога данной функции.
* Установите курсор в окно *Известные\_значения\_Y* и выделите диапазон ячеек массива .
* Установите курсор в окно *Известные\_значения\_Х* и выделите диапазон ячеек массива .
* Вместо щелчка по кнопке ОК нажмите комбинацию клавиш CTRL+SHIFT+ENTER. После нажатия указанной комбинации клавиш *MS Excel* вставит функцию ЛИНЕЙ( ) в активные ячейки и отобразит результат.

**Метод 2.** Для нахождения коэффициентов и воспользуемся системой

уравнений (2).

Вычислим сумму , используя функцию СУММ( ):

.

Вычислим сумму квадратов , используя функцию СУММКВ( ):

.

Вычислим сумму , используя функцию СУММ( ):



Вычислим сумму  на , используя функцию СУММПРОИЗВ( ):

.

Подставляя эти значения в систему (2), получим

 (3)

Найдем определитель системы уравнений, используя функцию МОПРЕД( )



Так как , для решения системы (3) применим метод Крамера.



.

Решение системы

.

Искомое уравнение регрессии имеет вид:

.

Найдем значения параметров степенной функции . Следовательно, уравнение регрессии имеет вид .

Данные для построения графика эмпирической модели

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,1 | 1,7 | 2,4 | 3 | 3,7 | 4,5 | 5,1 | 5,8 |
|  | 0,3 | 0,6 | 1,1 | 1,7 | 2,3 | 3 | 3,8 | 4,6 |
|  | 0,302 | 0,620 | 1,096 | 1,585 | 2,242 | 3,098 | 3,810 | 4,712 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |



Коэффициент детерминации  0,988 показывает, что уравнение достаточно хорошо описывает эмпирические данные.

**Лабораторная работа № 3**

**Тема: «Планирование экспериментов»**

**Цель работы**: Изучение методов планирования эксперимента для получения математического описания в виде уравнений регрессии и использование полученного описания для нахождения оптимальных параметров.

**3.1.Задания**

1. Задан план эксперимента в виде матрицы. Каждая *i* – я строка матрицы образует точку плана, а *j* - й столбец - результаты функции отклика в *r* параллельных экспериментах.
2. В соответствии с вариантом задания построить план проведения полного факторного эксперимента типа .
3. Выполнить нормировку факторов, используя следующие значения нулевых уровней
4. Определить коэффициенты уравнения регрессии.
5. Проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии по критерию Стьюдента.
6. Проверить адекватность модели оригиналу с помощью критерия Фишера.

**3.2. Исходные данные для выполнения лабораторной работы**

Вариант 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,004 | 3,031 | 3,035 | 3,039 | 3,001 |
| 5,193 | 5,152 | 5,177 | 5,209 | 5,151 |
| 3,927 | 3,950 | 3,936 | 3,898 | 3,897 |
| 7,141 | 7,099 | 7,111 | 7,138 | 7,097 |
| 4,684 | 4,697 | 4,688 | 4,730 | 4,729 |
| 9,135 | 9,123 | 9,166 | 9,134 | 9,117 |
| 6,371 | 6,403 | 6,343 | 6,339 | 6,337 |
| 14,672 | 14,680 | 14,695 | 14,668 | 14,672 |

Вариант 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,651 | 3,605 | 3,653 | 3,592 | 3,627 |
| 6,547 | 6,514 | 6,535 | 6,562 | 6,581 |
| 4,761 | 4,793 | 4,816 | 4,792 | 4,801 |
| 9,515 | 9,566 | 9,534 | 9,552 | 9,528 |
| 5,828 | 5,847 | 5,842 | 5,905 | 5,886 |
| 13,041 | 13,081 | 13,051 | 13,089 | 13,063 |
| 8,364 | 8,371 | 8,338 | 8,365 | 8,366 |
| 25,575 | 25,563 | 25,611 | 25,578 | 25,534 |

Вариант 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,124 | 2,150 | 2,139 | 2,140 | 2,157 |
| 3,382 | 3,394 | 3,368 | 3,374 | 3,372 |
| 2,705 | 2,652 | 2,655 | 2,674 | 2,713 |
| 4,307 | 4,242 | 4,276 | 4,317 | 4,255 |
| 3,107 | 3,089 | 3,096 | 3,119 | 3,137 |
| 5,081 | 5,148 | 5,123 | 5,092 | 5,073 |
| 3,948 | 3,901 | 3,914 | 3,951 | 3,919 |
| 6,873 | 6,920 | 6,932 | 6,858 | 6,869 |

Вариант 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,588 | 2,597 | 2,542 | 2,537 | 2,539 |
| 4,191 | 4,165 | 4,152 | 4,129 | 4,138 |
| 3,201 | 3,231 | 3,202 | 3,199 | 3,248 |
| 5,509 | 5,453 | 5,448 | 5,511 | 5,445 |
| 3,793 | 3,830 | 3,850 | 3,789 | 3,852 |
| 6,718 | 6,752 | 6,760 | 6,709 | 6,743 |
| 4,963 | 4,966 | 5,001 | 4,952 | 5,007 |
| 9,738 | 9,753 | 9,702 | 9,746 | 9,737 |
| 7,094 | 7,126 | 7,149 | 7,102 | 7,158 |

Вариант 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,072 | 3,028 | 3,080 | 3,049 | 3,069 |
| 5,193 | 5,159 | 5,163 | 5,220 | 5,168 |
| 3,932 | 3,955 | 3,893 | 3,915 | 3,939 |
| 7,094 | 7,126 | 7,149 | 7,102 | 7,158 |
| 4,740 | 4,704 | 4,668 | 4,698 | 4,724 |
| 9,163 | 9,167 | 9,160 | 9,133 | 9,191 |
| 6,336 | 6,396 | 6,369 | 6,405 | 6,357 |
| 14,676 | 14,668 | 14,725 | 14,722 | 14,741 |

Вариант 6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4,292 | 4,285 | 4,333 | 4,304 | 4,277 |
| 8,385 | 8,390 | 8,404 | 8,421 | 8,390 |
| 5,881 | 5,886 | 5,847 | 5,900 | 5,909 |
| 13,349 | 13,332 | 13,357 | 13,342 | 13,356 |
| 7,389 | 7,368 | 7,439 | 7,419 | 7,442 |
| 20,252 | 20,271 | 20,271 | 20,258 | 20,310 |
| 11,282 | 11,269 | 11,293 | 11,249 | 11,254 |
| 66,571 | 66,613 | 66,562 | 66,585 | 66,620 |

Вариант 7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4,307 | 4,284 | 4,284 | 4,316 | 4,286 |
| 8,387 | 8,396 | 8,430 | 8,389 | 8,404 |
| 5,832 | 5,873 | 5,856 | 5,843 | 5,862 |
| 13,329 | 13,304 | 13,328 | 13,340 | 13,312 |
| 7,379 | 7,415 | 7,415 | 7,368 | 7,368 |
| 20,255 | 20,278 | 20,304 | 20,279 | 20,261 |
| 11,226 | 11,238 | 11,271 | 11,234 | 11,273 |
| 66,599 | 66,605 | 66,588 | 66,595 | 66,562 |

Вариант 8

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,583 | 3,605 | 3,623 | 3,623 | 3,587 |
| 6,555 | 6,564 | 6,523 | 6,559 | 6,511 |
| 4,795 | 4,790 | 4,776 | 4,798 | 4,744 |
| 9,504 | 9,530 | 9,524 | 9,557 | 9,530 |
| 5,855 | 5,839 | 5,827 | 5,881 | 5,863 |
| 13,040 | 13,011 | 13,045 | 13,061 | 13,036 |
| 8,328 | 8,301 | 8,303 | 8,319 | 8,310 |
| 25,586 | 25,544 | 25,578 | 25,562 | 25,556 |

Вариант 9

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,054 | 3,032 | 3,024 | 3,046 | 3,019 |
| 5,147 | 5,170 | 5,178 | 5,190 | 5,177 |
| 3,926 | 3,895 | 3,937 | 3,931 | 3,915 |
| 7,117 | 7,121 | 7,101 | 7,130 | 7,091 |
| 4,701 | 4,682 | 4,690 | 4,718 | 4,719 |
| 9,150 | 9,159 | 9,115 | 9,162 | 9,156 |
| 6,390 | 6,383 | 6,384 | 6,378 | 6,378 |
| 14,677 | 14,670 | 14,718 | 14,690 | 14,693 |

Вариант 10

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,549 | 2,537 | 2,563 | 2,564 | 2,569 |
| 4,118 | 4,164 | 4,155 | 4,126 | 4,151 |
| 3,236 | 3,220 | 3,202 | 3,212 | 3,207 |
| 5,445 | 5,485 | 5,449 | 5,472 | 5,455 |
| 3,825 | 3,812 | 3,790 | 3,782 | 3,781 |
| 6,721 | 6,714 | 6,741 | 6,704 | 6,722 |
| 4,951 | 4,989 | 4,955 | 4,941 | 4,981 |
| 9,735 | 9,693 | 9,705 | 9,711 | 9,726 |

Вариант 11

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,164 | 2,165 | 2,145 | 2,150 | 2,163 |
| 3,347 | 3,338 | 3,322 | 3,318 | 3,358 |
| 2,639 | 2,658 | 2,651 | 2,648 | 2,670 |
| 4,281 | 4,251 | 4,296 | 4,276 | 4,269 |
| 3,086 | 3,084 | 3,081 | 3,122 | 3,068 |
| 5,082 | 5,128 | 5,117 | 5,106 | 5,078 |
| 3,950 | 3,932 | 3,908 | 3,935 | 3,901 |
| 6,855 | 6,870 | 6,875 | 6,872 | 6,907 |

Вариант 12

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,983 | 1,951 | 1,969 | 1,981 | 1,935 |
| 3,004 | 3,024 | 2,984 | 2,983 | 3,007 |
| 2,435 | 2,415 | 2,428 | 2,394 | 2,438 |
| 3,767 | 3,794 | 3,784 | 3,783 | 3,803 |
| 2,788 | 2,823 | 2,815 | 2,777 | 2,773 |
| 4,491 | 4,467 | 4,492 | 4,473 | 4,460 |
| 3,485 | 3,510 | 3,515 | 3,524 | 3,475 |
| 5,883 | 5,879 | 5,863 | 5,870 | 5,877 |

Вариант 13

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,132 | 2,114 | 2,160 | 2,146 | 2,120 |
| 3,373 | 3,324 | 3,377 | 3,327 | 3,385 |
| 2,708 | 2,645 | 2,657 | 2,645 | 2,657 |
| 4,277 | 4,254 | 4,311 | 4,288 | 4,265 |
| 3,075 | 3,074 | 3,090 | 3,099 | 3,096 |
| 5,083 | 5,076 | 5,136 | 5,098 | 5,140 |
| 3,978 | 3,928 | 3,905 | 3,948 | 3,904 |
| 6,898 | 6,908 | 6,887 | 6,940 | 6,904 |

Вариант 14

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,567 | 2,587 | 2,585 | 2,527 | 2,583 |
| 4,148 | 4,183 | 4,155 | 4,144 | 4,169 |
| 3,234 | 3,259 | 3,216 | 3,240 | 3,200 |
| 5,458 | 5,485 | 5,490 | 5,513 | 5,469 |
| 3,781 | 3,808 | 3,820 | 3,814 | 3,842 |
| 6,713 | 6,722 | 6,750 | 6,751 | 6,700 |
| 4,998 | 4,949 | 4,950 | 4,947 | 4,968 |
| 9,758 | 9,689 | 9,701 | 9,711 | 9,686 |

Вариант 15

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,073 | 3,033 | 3,062 | 3,065 | 3,029 |
| 5,191 | 5,186 | 5,221 | 5,156 | 5,198 |
| 3,884 | 3,932 | 3,929 | 3,914 | 3,899 |
| 7,152 | 7,165 | 7,179 | 7,100 | 7,143 |
| 4,743 | 4,740 | 4,683 | 4,675 | 4,699 |
| 9,178 | 9,194 | 9,157 | 9,159 | 9,121 |
| 6,404 | 6,370 | 6,341 | 6,340 | 6,393 |
| 14,701 | 14,690 | 14,734 | 14,754 | 14,674 |

Вариант 16

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 8,346 | 8,241 | 8,242 | 8,247 | 8,244 |
| 12,352 | 12,398 | 12,478 | 12,318 | 12,308 |
| 10,205 | 10,080 | 10,088 | 10,179 | 10,137 |
| 15,282 | 15,299 | 15,269 | 15,304 | 15,286 |
| 11,551 | 11,514 | 11,569 | 11,657 | 11,584 |
| 17,731 | 17,736 | 17,781 | 17,709 | 17,863 |
| 14,306 | 14,165 | 14,262 | 14,254 | 14,173 |
| 22,574 | 22,715 | 22,599 | 22,579 | 22,569 |

Вариант 17

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 8,439 | 7,904 | 8,440 | 8,473 | 7,916 |
| 10,523 | 10,650 | 10,778 | 10,273 | 10,631 |
| 9,401 | 9,168 | 9,534 | 9,249 | 9,306 |
| 12,016 | 11,721 | 12,006 | 11,744 | 11,798 |
| 10,008 | 9,906 | 9,798 | 10,097 | 10,073 |
| 13,110 | 12,540 | 12,915 | 13,047 | 13,016 |
| 11,395 | 11,397 | 11,313 | 11,461 | 11,254 |
| 14,120 | 14,376 | 14,486 | 14,175 | 13,952 |

Вариант 18

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 7,939 | 7,903 | 7,980 | 7,619 | 7,750 |
| 12,365 | 12,356 | 12,004 | 12,037 | 12,409 |
| 9,792 | 9,514 | 10,072 | 9,910 | 9,676 |
| 15,647 | 15,711 | 15,912 | 15,556 | 15,911 |
| 11,327 | 11,583 | 11,094 | 11,421 | 11,074 |
| 19,269 | 19,440 | 19,031 | 18,838 | 19,042 |
| 14,245 | 14,808 | 14,494 | 14,786 | 14,449 |
| 26,177 | 26,630 | 26,707 | 26,237 | 26,481 |

 Вариант 19

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,759 | 3,709 | 3,745 | 3,768 | 3,740 |
| 4,828 | 4,801 | 4,845 | 4,845 | 4,845 |
| 4,243 | 4,253 | 4,242 | 4,300 | 4,275 |
| 5,476 | 5,432 | 5,414 | 5,446 | 5,482 |
| 4,661 | 4,678 | 4,677 | 4,610 | 4,658 |
| 5,864 | 5,887 | 5,867 | 5,861 | 5,890 |
| 5,217 | 5,236 | 5,236 | 5,268 | 5,215 |
| 6,612 | 6,613 | 6,563 | 6,598 | 6,575 |

Вариант 20

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,872 | 2,904 | 2,841 | 2,888 | 2,896 |
| 3,540 | 3,561 | 3,517 | 3,517 | 3,510 |
| 3,213 | 3,183 | 3,223 | 3,199 | 3,229 |
| 3,863 | 3,870 | 3,884 | 3,864 | 3,904 |
| 3,444 | 3,452 | 3,439 | 3,428 | 3,424 |
| 4,125 | 4,147 | 4,105 | 4,153 | 4,152 |
| 3,810 | 3,779 | 3,755 | 3,803 | 3,759 |
| 4,532 | 4,477 | 4,472 | 4,505 | 4,513 |

**3.3. Статистическая обработка результатов ПФЭ**

Предположим, что общий вид плана и результаты параллельных экспериментов приведены в табл.3.1.

Таблица 3.1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  эксперимента |  |  |  | Результат отклика в параллельных опытах | | |
| 1 |  | *r* |
| 1 | - |  | - |  |  |  |
| 2 | - |  | + |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| *n* | + |  | + |  |  |  |

Рассмотрим последовательность статистической обработки и проверки адекватности построенной модели.

1. Определяются среднее значение и дисперсия отклика в *i* –м эксперименте (строке) по формулам

(3.1)

. (3.2)

где - значение отклика в *i*-м эксперименте (строке) *j*-й серии

экспериментов;

- число параллельных экспериментов.

2. Выполняется проверка однородности дисперсий . Для этого определяется расчетное значение критерия Кохрена по формуле

. (3.3)

С критерием связаны степени свободы: для числителя , для знаменателя .

Проверяется условие

, (3.4)

где критическое (табличное) значение критерия Кохрена, найденное для заданной доверительной вероятности при числе степеней свободы .

Если условие (3.4) выполняется, то дисперсии однородны и статистическая обработка продолжается. Если не выполняется, то дисперсии неоднородны. В этом случае требуются повторить эксперимент, изменив условия его проведения (набор факторов, интервал их варьирования, точность измерительных приборов и пр.).

3. Определяется оценка дисперсии воспроизводимости экспериментов определяется по формуле

. (3.5)

с ней связано число степеней свободы .

4. Определяются коэффициенты уравнения регрессии

(3.6)

где

- кодированное значение -го фактора в -м эксперименте (строке)

матрицы плана;

- кодированное значение -го и -го факторов в -м эксперименте

(строке) матрицы плана;

- кодированное значение -го, -го и -го факторов в -м

эксперименте (строке) матрицы плана.

5. Выполняется проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

Для выполнения проверки нужно построить доверительный интервал , соответствующий доверительной вероятности , для каждого из коэффициента .

, (3.7)

где - коэффициент, рассчитанный по формуле (3.6);

- возможная ошибка, возникающая от замены истинного значения

коэффициента его оценкой.

Ошибка полагается одинаковой для всех коэффициентов:

, (3.8)

где - табличное значение критерия Стьюдента при доверительной

вероятности и числе степеней свободы, с которым

определялась дисперсия .

Коэффициент (его расчетное значение) значим, если построенный доверительный интервал не содержит точку . В данном случае это равносильно условию .

Если интервал содержит точку , или, что, то же самое , то коэффициент с доверительной вероятностью не значим, так как отличным от нуля он мог оказаться за счет погрешностей эксперимента.

6. Принимая во внимание только значимые коэффициенты, записывается полином вида

.

Выполняется проверка адекватности модели и делается заключение о ее пригодности для практики. Для этого вначале подсчитывается дисперсия, характеризующая ошибку модели

(3.9)

где - разность между рассчитанным по полученной модели и экспериментальным значениями *y* в - й строке (эксперименте);

- значение отклика по построенной модели в - й строке

(эксперименте);

- число степеней свободы модели;

- число экспериментальных точек;

- количество значимых коэффициентов модели в уравнении

регрессии, кроме коэффициента .

Затем определяется расчетное значение критерия Фишера

. (3.10)

С критерием Фишера связанны степени свободы: для числителя ; для знаменателя .

Проверяется условие

, (3.11)

где - табличное (критическое) значение критерия Фишера, найденное для заданной доверительной вероятности при числе степеней свободы .

Если условие (3.11) выполняется, то построенная модель адекватна эксперименту.

При невыполнении условия (3.11) модель неадекватна и пользоваться на практике ей нельзя.

Для лучшего понимания алгоритма статистической обработки ниже рассмотрим пример.

**3.4. Пример выполнения работы**

Для исследования выходного параметра технологического процесса при числе параметров *k*=2 был спланирован ПФЭ и выполнено три серии параллельных экспериментов. Использовались следующие значения нулевых уровней . Результаты эксперимента представлены в табл.3.2.

Таблица 3.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  эксперимента |  |  |  | Результат отклика в параллельных опытах | | |  |  |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | - | - | - | 8 | 7 | 9 | 8 | 1 |
| 2 | - | + | + | 20 | 22 | 18 | 20 | 4 |
| 3 | + | - | - | 17 | 16 | 15 | 16 | 1 |
| 4 | + | + | + | 30 | 34 | 32 | 32 | 4 |

Требуется построить модель, описывающую выходной параметр технологического процесса, проверить ее адекватность.

Эксперимент проводится при двух значениях фактора

Для облегчения расчетов удобно провести нормировку факторов с помощью преобразований

(3.12)

По формулам (3.1) и (3.2) посчитываем среднее значение и дисперсии в каждом эксперименте матрицы

.

Результаты расчета величин и внесены в табл.3.2. Применяя критерий Кохрена, нетрудно убедиться, что опыты воспроизводимы, т.к.

.

По формуле (3.5) находим дисперсию воспроизводимости опытов

.

Используя формулы (3.6) определим коэффициенты уравнения регрессии:

*определение свободного члена*

*вычисление коэффициентов уравнения, характеризующих линейные эффекты*

*определение коэффициента уравнения, характеризующего эффект*

*взаимодействия*

Проверяем значимость коэффициентов. По таблицам распределения критерия Стьюдента при и числе степеней свободы

находим .

Определяем по формуле (3.8)

.

Так как выполняются условия

,

то коэффициенты значимы, а коэффициент незначим, так как для него условие не выполняется.

Линейная модель запишется в виде

. (2.13)

Проверим адекватность этой модели. По формуле (3.9) подсчитаем дисперсию, характеризующую ошибку модели. Для получения значений , используемых в формуле (3.9), в записанную модель (3.13) подставляем кодированные значения факторов согласно матрице плана (табл.3.2). Например, для первого эксперимента (строки) матрицы имеем:

.

Аналогично находим

Используя формулу (3.9) определяем дисперсию, характеризующую ошибку модели

Расчетное значение критерия Фишера находим по выражению (3.10)

.

По таблице критерия Фишера для доверительной вероятности

по значениям числа степеней свободы и находим .

Так как условие (1,6<5,32), то линейная модель вида (3.13) адекватна результатам эксперимента и ею можно пользоваться на практике.

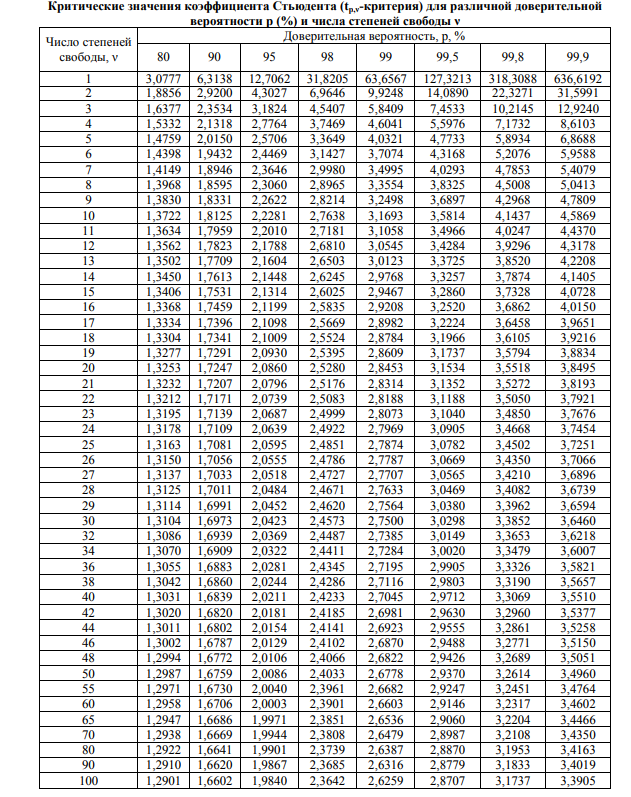
Осуществим переход к размерному полиному, используя соотношение (3.12), значения нулевых уровней и интервалов варьирования факторами и .

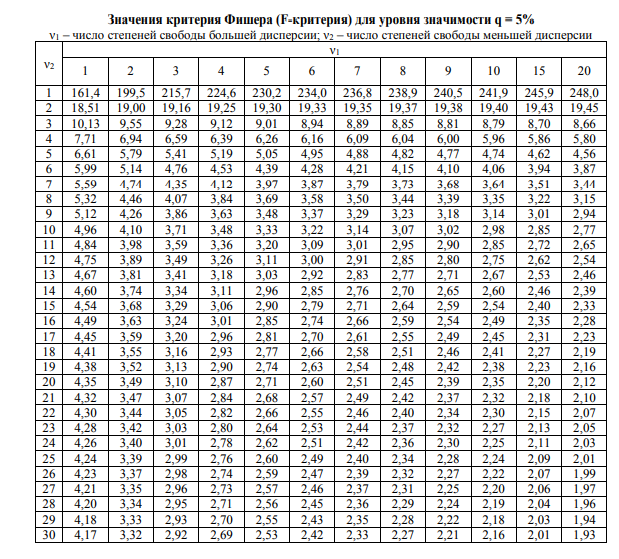
Получаем

.

**Приложение 1**







**Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости **

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 |  |
| 1 | 161,5 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 233,9 | 238,9 | 243,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,37 | 19,41 | 19,45 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,84 | 8,74 | 8,64 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,91 | 5,77 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,82 | 4,68 | 4,53 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,15 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,73 | 3,57 | 3,41 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,44 | 3,28 | 3,12 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,23 | 3,07 | 2,90 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,07 | 2,91 | 2,74 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 2,95 | 2,79 | 2,61 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,85 | 2,69 | 2,50 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,77 | 2,60 | 2,42 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,70 | 2,53 | 2,35 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,64 | 2,48 | 2,29 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,59 | 2,42 | 2,24 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,55 | 2,38 | 2,19 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,51 | 2,34 | 2,15 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,48 | 2,31 | 2,11 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,45 | 2,28 | 2,08 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,42 | 2,25 | 2,05 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,40 | 2,23 | 2,03 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,38 | 2,20 | 2,00 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,36 | 2,18 | 1,98 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,38 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,34 | 2,16 | 1,96 | 1,71 |
| 26 | 4,22 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,32 | 2,15 | 1,95 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,30 | 2,13 | 1,93 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,44 | 2,29 | 2,12 | 1,91 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,54 | 2,43 | 2,28 | 2,10 | 1,90 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,09 | 1,89 | 1,62 |
| 35 | 4,12 | 3,26 | 2,87 | 2,64 | 2,48 | 2,37 | 2,22 | 2,04 | 1,83 | 1,57 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,18 | 2,00 | 1,79 | 1,51 |
| 45 | 4,06 | 3,21 | 2,81 | 2,58 | 2,42 | 2,31 | 2,15 | 1,97 | 1,76 | 1,48 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 | 2,13 | 1,95 | 1,74 | 1,44 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,52 | 2,37 | 2,25 | 2,10 | 1,92 | 1,70 | 1,39 |
| 70 | 3,98 | 3,13 | 2,74 | 2,50 | 2,35 | 2,23 | 2,07 | 1,89 | 1,67 | 1,35 |
| 80 | 3,96 | 3,11 | 2,72 | 2,49 | 2,33 | 2,21 | 2,06 | 1,88 | 1,65 | 1,31 |
| 90 | 3,95 | 3,10 | 2,71 | 2,47 | 2,32 | 2,20 | 2,04 | 1,86 | 1,64 | 1,28 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,30 | 2,19 | 2,03 | 1,85 | 1,63 | 1,26 |
| 125 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,44 | 2,29 | 2,17 | 2,01 | 1,83 | 1,60 | 1,21 |
| 150 | 3,90 | 3,06 | 2,66 | 2,43 | 2,27 | 2,16 | 2,00 | 1,82 | 1,59 | 1,18 |
| 200 | 3,89 | 3,04 | 2,65 | 2,42 | 2,26 | 2,14 | 1,98 | 1,80 | 1,57 | 1,14 |
| 300 | 3,87 | 3,03 | 2,64 | 2,41 | 2,25 | 2,13 | 1,97 | 1,79 | 1,55 | 1,10 |
| 400 | 3,86 | 3,02 | 2,63 | 2,40 | 2,24 | 2,12 | 1,96 | 1,78 | 1,54 | 1,07 |
| 500 | 3,86 | 3,01 | 2,62 | 2,39 | 2,23 | 2,11 | 1,96 | 1,77 | 1,54 | 1,06 |
| 1000 | 3,85 | 3,00 | 2,61 | 2,38 | 2,22 | 2,10 | 1,95 | 1,76 | 1,53 | 1,03 |
|  | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 1,94 | 1,75 | 1,52 | 1 |